UDK 51-77:33

# КУРС ЗАЈМА - МОДЕЛИ ВАРИЈАБИЛНИХ ОТПЛАТА

**Др Миливоје Крчмар**[3]

*Rezime*

*U ovom radu prezentovano je iznala`ewe efektivnog iznosa zajma, odnosno kursa zajma, za slu~aj da se zajam amortizuje po sistemu varijabilnih otplata. Naime, u literaturi su obra|ena samo dva modela amortizacije zajma za iznala`ewe kursa, odnosno efektivnog iznosa zajma i to: model jednakih otplata i model jednakih anuiteta. Zbog toga }emo ovdje prezentovati dva nova modela za iznala`ewe efektivnog iznosa zajma i to:*

*1) model amortizacije zajma otplatama koje se mijewaju po aritmeti~koj progresiji, i*

*2) model amortizacije zajma otplatama koje se mijewaju po geometrijskoj progresiji.*

*Kqu~ne rije~i: amortizacija zajma, diskontovana vrijednost, efektivni iznos zajma, kurs zajma*

## 1. Увод

Kurs zajma je broj koji nam pokazuje koliko se nov~anih jedinica dobije u gotovu (efektivno) za svakih 100 nov~anih jedinica nominalne vrijednosti nekog vrijednosnog papira. Kurs se mo`e tra`iti u bilo kojem trenutku u toku perioda vra}awa duga. On je funkcija budu}ih obaveza du`nika (budu}ih kamata i otplata), kao i diskontne stope. Matemati~ki, kursna vrijednost jednog duga (kapitala) u nekom trenutku je jednaka diskontovanoj vrijednosti svih nepla}enih obaveza du`nika na bazi efektivne kamatne stope (stope prinosa) u stoticama odgovaraju}e nominalne diskontovane vrijednosti svih budu}ih obaveza, uz datu nominalnu kamatnu stopu.

[3] Vanredni profesor na Ekonomskom fakultetu u Bawoj Luci

## 2. Модел амортизације зајма отплатама које се мијењају по аритметичкој прогресији

U ovom modelu amortizacije zajma polazi se od pretpostavke da je svaka sqede}a otplata ve}a (mawa) od prethodne za konstantan iznos koji }emo ozna~iti sa $d$.

Budu}i da je efektivni iznos zajma jednak diskontovanoj vrijednosti svih budu}ih obaveza du`nika na bazi efektivne kamatne stope, to se model za ovaj slu~aj mo`e postaviti na sqede}i na~in:

$$K_e = DVb_e + DVI_e$$

gdje je:

$K_e$ - efektivni iznos zajma,

$DVb_e$ - diskontovana vrijednost svih otplata koje }e du`nik platiti u toku amortizacije zajma po efektivnoj kamatnoj stopi,

$DVI_e$ - diskontovane vrijednosti svih kamata koje }e du`nik platiti u toku amortizacije zajma po efektivnoj kamatnoj stopi.

Nadaqe, to }e biti:

$$DVb_e = b_1 v_e + (b_1 \pm d) v_e^2 + (b_1 \pm 2d) v_e^3 + \cdots + \left[ b_1 \pm (n-1)d \right] v_e^n$$

$$= b_1 v_e + b_1 v_e^2 + b_1 v_e^3 + \cdots + b_1 v_e^n \pm d \left[ v_e^2 + 2v_e^3 + 3v_e^4 + \cdots + (n-1) v_e^n \right],$$

$$DVb_e = b_1 \frac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)} \pm dS,$$

gdje je:

$$S = v_e^2 + 2v_e^3 + 3v_e^4 + \cdots + (n-1) v_e^n.$$

Kada se ova jedna~ina pomno`i sa $v_e$ i dobivena oduzme od polazne jedna~ine, dobije se:

$$S(1 - v_e) = v_e^2 + v_e^3 + v_e^4 + \cdots + v_e^n + v_e^{n+1} - n v_e^{n+1}.$$

Sre|ivawem ove jedna~ine dobije se:

$$S = \frac{100}{p_e} \left( \frac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)} - \frac{n}{r_e^n} \right).$$

Prema tome, diskontovana vrijednost svih otplata po efektivnoj kamatnoj stopi, bi}e:

$$DVb_e = b_1 \frac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)} \pm \frac{100d}{p_e} \left( \frac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)} - \frac{n}{r_e^n} \right)$$

Da bismo prona{li diskontovanu vrijednost svih kamata, koje }e du`nik platiti u toku amortizacije zajma po efektivnoj kamatnoj stopi, neophodno je prethodno prikazati osnovice koje slu`e za obra~un kamate.

To }e, u ovom modelu, biti:

$$
\begin{array}{llccccccccccc}
1. & K & = & b_1 & + & b_1 \pm d & + & b_1 \pm 2d & + & b_1 \pm 3d & + & \dots & + \; b_1 \pm (n-1)d \\
2. & R_1 & = & & & b_1 \pm d & + & b_1 \pm 2d & + & b_1 \pm 3d & + & \dots & + \; b_1 \pm (n-1)d \\
3. & R_2 & = & & & & & b_1 \pm 2d & + & b_1 \pm 3d & + & \dots & + \; b_1 \pm (n-1)d \\
 & \dots & & & & & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\
(n-1). & R_{n-2} & = & & & & & & & & & b_1 \pm (n-2)d & + \; b_1 \pm (n-1)d \\
n. & R_{n-1} & = & & & & & & & & & & b_1 \pm (n-1)d
\end{array}
$$

Na bazi osnovica za obra~un kamata, koje se mogu rastaviti na dva dijela, i to na osnovice gdje imamo sve jednake otplate (po $b_1$ nov~anih jedinica) i osnovice gdje imamo sve diferencije (po $d$ nov~anih jedinica), to }emo prvo izna}i diskontovanu vrijednost kamate na pravi dio osnovice.

To }e biti:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
DVIb_e = & b_1 i v_e & + & b_1 i v_e & + & b_1 i v_e & + & \dots & + & b_1 i v_e & = & n b_1 i v_e \\
 & & & b_1 i v_e^2 & + & b_1 i v_e^2 & + & \dots & + & b_1 i v_e^2 & = & (n-1) b_1 i v_e^2 \\
 & & & & & b_1 i v_e^3 & + & \dots & + & b_1 i v_e^3 & = & (n-2) b_1 i v_e^3 \\
 & & & & & & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\
 & & & & & & & b_1 i v_e^{n-1} & + & b_1 i v_e^{n-1} & = & 2 b_1 i v_e^{n-1} \\
 & & & & & & & & & b_1 i v_e^{n} & = & b_1 i v_e^{n}
\end{array}
$$

To }e, daqe, biti:

$$DVIb_e = b_1 i \left[ n v_e + (n-1) v_e^2 + (n-2) v_e^3 + \cdots + 2 v_e^{n-1} + v_e^n \right].$$

Ako izraz u sredwoj zagradi ozna~imo sa $S$, to }e biti:

$$S = n v_e + (n-1) v_e^2 + (n-2) v_e^3 + \cdots + 2 v_e^{n-1} + v_e^n .$$

Kada se ova jedna~ina pomno`i sa $v_e$ i od dobivene oduzme polazna jedna~ina, dobije se

$$S=\frac{v_e(v_e+v_e^2+v_e^3+\cdots+v_e^{n-1}+v_e^{n-1}+v_e^n-n)}{v_e-1}.$$

Poslije neophodnog matemati~kog sre|ivawa ovog izraza, dobije se

$$S=\frac{n-\dfrac{r_e^n-1}{r_e^n(r_e-1)}}{i_e}.$$

To }e, kona~no, biti

$$DVIb_e=b_1 i\frac{n-\dfrac{r_e^n-1}{r_e^n(r_e-1)}}{i_e}.$$

Diskontovana vrijednost kamate koja se pla}a na diferencije otplata, bi}e

$$\begin{aligned}DVId_e = &\pm div_e \pm 2div_e \pm 3div_e \pm \cdots \pm (n-1)div_e\\ &\pm div_e^2 \pm 2div_e^2 \pm 3div_e^2 \pm \cdots \pm (n-1)div_e^2\\ &\pm 2div_e^3 \pm 3div_e^3 \pm \cdots \pm (n-1)div_e^3\\ &\pm 3div_e^4 \pm \cdots \pm (n-1)div_e^4\\ &\text{- - - - - - - - -}\\ &\pm (n-1)div_e^n\end{aligned}$$

To }e, daqe, biti

$$\begin{aligned}DVId_e &=\pm di(v_e+v_e^2)\pm 2di(v_e+v_e^2+v_e^3)\pm 3di(v_e+v_e^2+v_e^3+v_e^4=)\pm\\ &\cdots\pm(n-1)di(v_e+v_e^2+v_e^3+\cdots+v_e^n)\\ &=\pm di\left[(v_e+v_e^2)+2(v_e+v_e^2+v_e^3)+3(v_e+v_e^2+v_e^3+v_e^4)+\cdots+(n-1)(v_e+v_e^2+v_e^3+\cdots+v_e^n)\right]\\ &=\pm di\left[\frac{r_e^2-1}{r_e^2(r_e-1)}+2\frac{r_e^3-1}{r_e^3(r_e-1)}+3\frac{r_e^4-1}{r_e^4(r_e-1)}+\cdots+(n-1)\frac{r_e^n-1}{r_e^n(r_e-1)}\right]\\ &=\frac{\pm di}{r_e-1}\left[1-v_e^2+2(1-v_e^3)+3(1-v_e^4)+\cdots+(n-1)(1-v_e^n)\right].\end{aligned}$$

Ako uvedemo da je

$$S=1-v_e^2+2-2v_e^3+3-3v_e^4+\cdots+(n-1)-(n-1)v_e^n.$$

te }e daqe biti

$$S = \frac{n(n-1)}{2} + S'$$

gdje je: $S' = -v_e^2 - 2v_e^3 - 3v_e^4 - \cdots - (n-1)v_e^n.$

Kada se ova jedna~ina pomno`i sa $v_e$ i od dobivene oduzme polazna jedna~ina, dobije se

$$S'(v_e - 1) = v_e^2 + v_e^3 + v_e^4 \cdots + v_e^n + v_e^{n+1} - n\, v_e^{n+1}.$$

Poslije sre|ivawa ovog izraza, dobije se

$$S' = -\frac{100}{p_e}\left(\frac{r_e^n - 1}{r_e^n(r_e - 1)} - \frac{n}{r_e^n}\right).$$

Kona~no, mo`e se napisati ~emu je jednak izraz $S$

$$S = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{100}{p_e}\left(\frac{r_e^n - 1}{r_e^n(r_e - 1)} - \frac{n}{r_e^n}\right).$$

Sada se mo`e napisati ~emu je jednaka diskontovana vrijednost svih kamata pla}enih na diferencije otplata. To }e biti

$$DVId_e = \pm \frac{100di}{p_e}\left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{100}{p_e}\left(\frac{r_e^n - 1}{r_e^n(r_e - 1)} - \frac{n}{r_e^n}\right)\right].$$

Prema tome, diskontovana vrijednost svih kamata u toku amortizacije zajma, na bazi efektivne kamatne stope, bi}e

$$DVI_e = b_1 i \frac{n - \dfrac{r_e^{n-1}}{r_e^n(r_e - 1)}}{i_e} \pm \frac{100di}{p_e}\left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{100}{p_e}\left(\frac{r_e^n - 1}{r_e^n(r_e - 1)} - \frac{n}{r_e n}\right)\right].$$

Kona~no se mo`e napisati ~emu je jednak efektivni iznos zajma za ovaj model amortizacije. To }e biti

$$K_e = b_1 \frac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)} \pm \frac{100d}{p_e}\left( \frac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)} - \frac{n}{r_e^n} \right) + b_1 i \frac{n - \dfrac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)}}{i_e} \pm$$

$$\pm \frac{100di}{p_e}\left[ \frac{n(n-1)}{2} - \frac{100}{p_e}\left( \frac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)} - \frac{n}{r_e^n} \right) \right].$$

Poslije sre|ivawa ovog izraza, dobije se

$$K_e = b_1 \left[ \frac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)} + i \frac{n - \dfrac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)}}{i_e} \right] \pm \frac{100d}{p_e}\left\{ \left[ \frac{r_e^n - 1}{r_e^n (r_e - 1)} - \frac{n}{r_e^n} \right]\left( 1 - \frac{100i}{p_e} \right) + i \frac{n(n-1)}{2} \right\}.$$

## 3. Модел амортизације зајма отплатама које се мијењају по геометријској прогресији

U ovom modelu amortizacije zajma polazi se od pretpostavke da je svaka sqede}a otplata ve}a (mawa) od prethodne $q$ puta.

Kako je efektivni iznos zajma jednak diskontovanoj vrijednosti svih budu}ih pla}awa du`nika na bazi efektivne kamatne stope, to }e u ovom slu~aju biti

$$K_e = DVb_e + DVI_e,$$

odnosno

$$DVb_e = b_1 v_e + b_1 q v_e^2 + b_1 q^2 v_e^3 + \cdots + b_1 q^{n-1} v_e^n$$

To }e, daqe, biti

$$DVb_e = b_1 \left( v_e + q v_e^2 + q^2 v_e^3 + \cdots + q^{n-1} v_e^n \right).$$

Ako izraz u zagradi ozna~imo sa $S$, to }e biti

$$S = v_e + q v_e^2 + q^2 v_e^3 + \cdots + q^{n-1} v_e^n$$

Kada se ova jedna~ina pomno`i sa $vq$ i kada se polazna oduzme od dobivene jedna~ine, dobije se

$$S = \frac{v_e (q^n v_e^n - 1)}{v_e q - 1}.$$

Kada se izvr{i zamjena $v_e$ sa $\dfrac{1}{r_e}$ i izvr{i neophodno matemati~ko sre|ivawe, dobije se

$$S = \frac{q^n - r_e^n}{r_e^n (q - r_e)}.$$

To }e, kona~no, biti

$$DVb_e = b_1 \frac{q^n - r_e^n}{r_e^n (q - r_e)}.$$

Sada je potrebno prona}i diskontovanu vrijednost ovih kamata, koje }e du`nik platiti u toku amortizacije zajma, po efektivnoj kamatnoj stopi.

Da bismo izra~unali diskontovanu vrijednost ovih kamata, potrebno je prethodno napisati osnovice od kojih se obra~unava kamata. To }e biti

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
1. & K & = & b_1 & + & b_1 q & + & b_1 q^2 & + & b_1 q^3 & + & \ldots & + & b_1 q^{n-1} \\
2. & R_1 & = & & & b_1 q & + & b_1 q^2 & + & b_1 q^3 & + & \ldots & + & b_1 q^{n-1} \\
3. & R_2 & = & & & & & b_1 q^2 & + & b_1 q^3 & + & \ldots & + & b_1 q^{n-1} \\
 & \ldots & & & & & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
(n-1). & R_{n-2} & = & & & & & & & & & b_1 q^{n-2} & + & b_1 q^{n-1} \\
n. & R_{n-1} & = & & & & & & & & & & & b_1 q^{n-1}
\end{array}.$$

Na bazi osnovica za obra~un kamate mo`e se napisati ~emu je jednaka diskontovana vrijednost kamata. To }e biti

$$\begin{aligned}
DVI_e = b_1 i v_e + b_1 q i v_e + b_1 q^2 i v_e + b_1 q^3 i v_e + \cdots + b_1 q^{n-1} i v_e \\
b_1 q i v_e^2 + b_1 q^2 i v_e^2 + b_1 q^3 i v_e^2 + \cdots + b_1 q^{n-1} i v_e^2 \\
b_1 q^2 i v_e^3 + b_1 q^3 i v_e^3 + \cdots + b_1 q^{n-1} i v_e^3 \\
\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\
b_1 q^{n-2} i v_e^{n-1} + b_1 q^{n-1} i v_e^{n-1} \\
b_1 q^{n-1} i v_e^n.
\end{aligned}$$

To se, daqe, mo`e napisati kao

$$DVI_e = b_1 i (v_e + q v_e^2 + q^2 v_e^3 + \cdots q^{n-1} v_e^n) + b_1 q i \left( v_e + q v_e^2 + q^2 v_e^3 + \cdots + q^{n-2} v_e^{n-1} \right) +$$
$$+ b_1 q^2 i (v_e + q v_e^2 + q^2 v_e^3 + \cdots + q^{n-3} v_e^{n-2}) + \cdots + b_1 q^{n-1} i v_e,$$

odnosno, to }e biti

$$DVI_e = b_1 i\, v_e \left[(1+qv_e+q^2v_e^2+\cdots+q^{n-1}v_e^{n-1})+(q+q^2v_e+\right.$$
$$\left.+q^3v_e^2+\cdots+q^{n-1}v_e^{n-2})+(q^2+q^3v_e+q^4v_e^2+\cdots+q^{n-1}v_e^{n-3})+\cdots+q^{n-1}\right].$$

Ako uzmemo da je

$$S = 1+qv_e+q^2v_e^2+\cdots+q^{n-1}v_e^{n-1}$$

i ako ovu jedna~inu pomno`imo sa $qv_e$, te od dobivene jedna~ine oduzmemo polazni izraz, dobije se

$$S = \frac{q^n v_e^n - 1}{qv_e - 1}.$$

Kada umjesto $v_e$ uvrstimo $\frac{1}{r_e}$ i izvr{imo neophodno sre|ivawe ovog izraza, dobije se

$$S = \frac{r_e(q^n - r_e^n)}{r_e^n(q-r_e)}.$$

Na analogan na~in dobi}emo rje{ewe i za ostale izraze diskontovane vrijednosti kamate. To }e biti

$$DVI_e = b_1\, i\, v_e \left[\frac{r_e(q^n-r_e^n)}{r_e^n(q-r_e)}+\frac{r_e q(q^{n-1}-r_e^{n-1})}{r_e^{n-1}(q-r_e)}+\frac{r_e q^2(q^{n-2}-r_e^{n-2})}{r_e^{n-2}(q-r_e)}+\cdots+\frac{r_e q^{n-1}(q-r_e)}{r_e(q-r_e)}\right]$$
$$=\frac{b_1\, i\, v_e r_e}{q-r_e}\left[\frac{q^n-r_e^n}{r_e^n}+\frac{q\left(q^{n-1}-r_e^{n-1}\right)}{r_e^{n-1}}+\frac{q^2\left(q^{n-2}-r_e^{n-1}\right)}{r_e^{n-2}}+\cdots+\frac{q^{n-1}\left(q-r_e\right)}{r_e}\right].$$

Sre|ivawem ovog izraza, dobije se

$$DVI_e = \frac{b_1 i}{r_e^n(q-r_e)}\left[q^n\,\frac{r_e^n-1}{r_e-1}-r_e^n\,\frac{q^n-1}{q-1}\right].$$

Prema tome, efektivni iznos zajma, u trenutku doznake zajma, bi}e

$$K_e = b_1\,\frac{q^n r_e^n}{r_e^n(q-r_e)}+\frac{b_1 i}{r_e^n(q-r_e)}\left[q^n\,\frac{r_e^n-1}{r_e-1}-r_e^n\,\frac{q^n-1}{q-1}\right],$$

odnosno

$$K_e = \frac{b_1}{r_e^n(q-r_e)}\left[q^n-r_e^n+i\left(q^n\,\frac{r_e^n-1}{r_e-1}-r_e^n\,\frac{q^n-1}{q-1}\right)\right].$$

Me|utim, ako imamo slu~aj da se po~etak otplate zajma odga|a za odre|en broj perioda (godina), onda se radi o amortizaciji zajma s grace periodom. U tom slu~aju efektivni iznos zajma, za model u kojem se interkalarna kamata pla}a u toku amortizacije zajma, }e biti

$$K_e = \frac{b_1^*}{r_e^n (q - r_e)} \left[ q^n - r_e^n + i \left( q^n \frac{r_e^n - 1}{r_e - 1} - r_e^n \frac{q^n - 1}{q - 1} \right) \right] \frac{1}{r_e^{m-1}},$$

gdje je:

$m$ - broj perioda za koji se odga|a amortizacija zajma,

$b_1^*$ – prva otplata koja se izra~unava na bazi osnovice od $Kr^{m-1}$ nov~anih jedinica ako je nominalni iznos zajma $K$ nov~anih jedinica.

Za slu~aj da se interkalarna kamata pla}a u toku grace perioda, efektivni iznos zajma }e biti

$$K_e = Ki \frac{r_e^{m-1} - 1}{r_e^{m-1}(r_e - 1)} + \frac{b_1^*}{r_e (q - r_e)} \left[ q^n - r_e^n + i \left( q^n \frac{r_e^n - 1}{r_e - 1} - r_e^n \frac{q^n - 1}{q - 1} \right) \right] \frac{1}{r_e^{m-1}},$$

gdje je:

$Ki$ - iznos nominalne kamate koja se pla}a na kraju svakog obra~unskog perioda u toku grace perioda,

$b_1^*$ – je prva otplata koja se izra~unava na bazi nominalnog iznosa zajma, tj. iznosa od $K$ nov~anih jedinica.

## Закључак

Ciq ovog rada je prezentovawe novih modela za izra~unavawe kursa, odnosno efektivnog iznosa zajma. Ovdje su prezentovana dva modela koji se mogu direktno primijeniti u praksi. Naravno, broj modela je s teorijskog stanovi{ta neograni~en, ali smatramo da konstrukcija novih modela ima smisla samo ako se mogu primijeniti u praksi.

## Литература:


1. ***D′ Ecclesia, R.L.; Gardini,L. Appunti di matematica finanziaria, Torino: G. Giappichelli editore, 2001.***
2. Kr~mar, M. Finansijska matematika i metode investicionog odlu~ivawa, Sarajevo: Kemigrafika, 2002.
3. ***Prakach, A.; Karles G L.; Fernandez,R. Financial, Commercial and Martgage Mathemathics and Their Applications, New York: Preager, 1987.***

# *COURSE OF LOAN-MODELS OF VARIABLE PRINCIPAL REPAID*

***Summary***

***In this paper is presented the account of effective loan, i.e. course of loan, for case when loan is amortizated of variable principal repaid. Namley, in the literature are presented only two models of amortization of loan for account course of loan: model of equal annuity and model of equal princpal repaid. Therefore, we are presented two new models for account of effective loan:***

***1. model amortization of loan with principal repaid which are changed in aritmetic progression, and***

***2. model amortization of loan with principal repaid which are changed in geometrical progression***

***Keywords: amortization of loan, discount value, effective loan, course of loan.***